VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

POUŽITÍ KOOPERATIVNÍ TEORIE HER PŘI ŘEŠENÍ LOKÁLNÍHO KONFLIKTU
COOPERATIVE GAME THEORY IN DEALING WITH LOCAL CONFLICT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. Adriana Ilavská
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	**Bc. Adriana Ilavská**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Použití kooperativní teorie her při řešení lokálního konfliktu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kooperativní teorie hry je schopna kvantifikovat vyjednávací schopnosti jednotlivých aktérů rozhodovacího procesu. Tato kvantifikace umožňuje následné rozdělení případného společného zisku.

Cíle bakalářské práce:

Nastudování pokročilých partií teorie her. Zpracování modelu teorie her pro konkrétní zformulované úlohy.

Seznam doporučené literatury:

GILLES, Robert P. The cooperative game theory of networks and hierarchies. Heidelberg: Springer, c2010. Theory and decision library, v. 44. ISBN 978-364-2052-828.

OWEN, Guillermo. Game theory. Philadelphia: W.B. Saunders, 1969.

PELEG, Bezalel a Peter SUDHÖLTER. Introduction to the theory of cooperative games. Boston: Kluwer Academic Publishers, c2003. ISBN 14-020-7784-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalárska práca sa zameriava na predstavenie pojmov a konceptov riešenia z oblasti kooperatívnej teórie hier. Matematický aparát je následne aplikovaný na hypotetické situácie vzniku lokálneho konfliktu v Škandinávií a v krajinách bývalej Juhoslávie. Cieľom práce je poukázať na široké možnosti využitia naštudovaných partií kooperatívnych hier na poli medzinárodných vzťahov. Pre hypotetické konfliktné situácie je zostavenou charakteristickou funkciou vyjadrený možný zisk rôznych koalícií. Na zostavených hrách je následne počítaná Shapleyho hodnota vyjadrujúca férové rozdelenie zisku medzi jednotlivých hráčov a Myersonova hodnota, zohľadňujúca nemožnosť vzniku niektorých koalícií. Práca poskytuje interpretácie výsledkov na poli medzinárodných vzťahov. Poukazuje tak na veľké spektrum možného využitia kooperatívnej teórie hier pri vzniku konfliktov na medzinárodnej scéne, kde táto aplikácia nie je častá.

Abstract

The bachelor thesis is focused on introducing terms and solution concepts of the Cooperative Game Theory. The mathematical apparatus is then applied to the hypothetical local conflict in Scandinavia and in the countries of former Yugoslavia. The aim of the thesis is to point out the range of possibilities for using the Cooperative Games in the field of International Relations. For hypothetical conflicting situations, the potential gain of different coalitions is expressed by a characteristic feature. For the composed games is calculated the Shapley's value, expressing the fair distribution of profits between individual players, and Myerson's value, taking into account the impossibility of creating some of the coalitions. The work provides interpretations of results in the field of International Relations. It points out a wide range of possible applications of Cooperative Game Theory when conflicts occur at international scene, where this application is not common.

kľúčové slová

kooperatívna teória hier, koalície, Shapleyho hodnota, Myersnova hodnota, lokálne konflikty

keywords

cooperative game theory, coalitions, Shapley value, Myerson value, local conflicts

ILAVSKÁ, A.: *Použití kooperativní teorie her při řešení lokálního konfliktu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 45 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D..

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Použití kooperativní teorie her při řešení lokálního konfliktu* vypracovala samostatne pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdinu, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Adriana Ilavská

Na tomto mieste by som rada poďakovala vedúcemu mojej bakalárskej práce doc.Mgr. Jaroslavovi Hrdinovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady a trpezlivý prístup, bez ktorých by práca nemohla vzniknúť.

Adriana Ilavská

Obsah

Úvod

”Teória hier je matematická disciplína, ktorá študuje situácie súťaženia a kooperácie medzi viacerými zainteresovanými stranami” [15]. Takáto široká definícia odvetvia aplikovanej matematiky, ktorým sa bude predkladaná bakalárska práca zaoberať, poskytuje veľkú škálu možností jej použitia - od klasických rozhodovacích situácií v bežnom živote, cez sociologické a politické dilemy, po vytváranie stratégií v ekonomickej súťaži. Inherentná prítomnosť podnetov uchopiteľných práve teóriou hier tak na odbor priťahuje veľkú pozornosť. Referencie na prvé situácie z ”teórie hier”sú uvádzané dokonca už v Biblii [5]. V priebehu dejín boli časté aplikácie na vojenské stratégie, cenovú súťaž a pod. Kooperatívnej teórii hier, ktorá bude predmetom práce, sa venovali John Neumann a Oskar Morgenstern, ktorí položili jej základy ich známym textom *Theory of Games and Economic Behavior*.

Kooperatívna teória hier si v ekonómii našla skutočne široké uplatnenie, ale v sociálnych a politických vedách má ešte priestor na rozšírenie aplikácií. Keďže vďaka matematickému aparátu, ktorý oblasť poskytuje, sme schopní kvantifikovať vyjednávacie schopnosti jednotlivých aktérov rozhodovacieho procesu a zohľadniť ho pri tvorbe koalícií, pre využitie v politológii a medzinárodných vzťahoch sa otvára veľké pole. Vytváranie koalícii je pre štúdium konfliktu na medzinárodnej scéne esenciálne, preto je analýza ich vzniku nesmierne dôležitá.

Bakalárska práca sa bude zaoberať aplikáciou kooperatívnej teórie hier na možnosti vzniku koalícií pri lokálnom konflikte. Cieľom je naštudovať partie teórie hier, ktoré sú pre problematiku dobre využiteľné a ukázať aplikácie na hypotetických situáciách, kedy by vypukol lokálny konflikt s viacerými zainteresovanými aktérmi, ktorí by mali možnosť vytvoriť koalíciu s účelom posilniť svoju pozíciu voči agresorovi.

V prvej kapitole budú priblížené pojmy a vlastnosti kooperatívnych hier a zavedený potrebný matematický aparát. Vychádzame zo základnej znalosti termínov teórie hier, kde je každá hra definovaná hráčmi, pravidlami, informovanosťou hráčov. Budeme pracovať s hrou v tvare s charakteristickou funkciou, ktorá definuje výplatu hráčov.

Nasledujúca časť bude zameraná na aplikovanie vybudovaného teoretického základu na konkrétne sformulované úlohy. Najskôr zostavíme charakteristickú funkciu, ktorou bude hra určená, a následne vyberieme regióny, v ktorých v prípade hypotetického konfliktu budeme skúmať možnosti vzniku koalícií. Cieľom práce je ukázať, aké interpretácie by mohla mať kvantifikácia hodnoty jednotlivých aktérov pre koalície. V záverečnej časti budú na vznik koalícií zavedené obmedzenia, ktoré sa pokúsia priblížiť modelovanie situácie realite. Bude predstavený koncept, ktorý so zákazom koalícií počíta a rozširuje možnosti pre reprezentatívnu interpretáciu.

1 Kooperatívne hry

Teória hier matematicky zachytáva správanie v strategických situáciách a modeluje široký okruh rozhodovacích úloh. K popisu interaktívnej rozhodovacej situácie popísanej hrou existujú dva diametrálne odlišné prístupy. Prvý prístup vychádza z absencie záväzných dohôd medzi hráčmi, kde každý z nich sleduje svoje záujmy. Hry, ktoré sú založené na tomto princípe metodologického individualizmu označujeme *nekooperatívne*. Druhý prístup, ktorý dovoľuje hráčom nadväzovať záväzné dohody, nazývame *kooperatívne hry* [10] a budeme sa ním v práci ďalej zaoberať.

Kooperatívna hra je abstraktnejšia ako nekooperatívna v tom zmysle, že explicitne nemodeluje stratégie, ale popisuje všetky možné zisky každej potenciálnej koalície. V hrách s prenosným úžitkom (TU hry[1]) je zisk koalície vyjadrený jedným číslom - napríklad množstvom peňazí, ktoré môžu byť následne medzi hráčov rozdistribuované. Spôsob, akým bude zisk prerozdelený je teda primárnou dilemou v tomto type hier [3]. V nasledujúcej časti budú zavedené základné pojmy a vybrané vlastnosti kooperatívnych hier a predstavené významné koncepty na hľadanie riešenia.

1.1 Základné pojmy

Kapitola vychádza z [14], [10], [2] a [3]. Ďalej v práci uvažujeme hru, v ktorej hráči môžu uzatvárať záväzné dohody a tvoriť koalície.

Definícia 1.1. Nech $N = \{1, 2, ..., n\}$ je množina všetkých hráčov hry s n-hráčmi. Každú podmnožinu $S \subset N$ budeme nazývať *koalícia*.

Prázdna koalícia nazveme prázdnu podmnožinu $S = \emptyset$ a *veľká koalícia* množinu $S = N$. Množinu všetkých koalícií označíme $2^N = \{S | S \subset N\}$.

Definícia 1.2. *Kooperatívnou hrou* rozumieme dvojicu (N, v), kde N je množina hráčov a v je funkcia priraďujúca každej koalícii S, reálne číslo $v(S)$ tak, že platí

$$v(\emptyset) = 0. \tag{1.1}$$

Funkcia v sa nazýva *charakteristická funkcia*.

Poznámka. Hra je definovaná svojou charakteristickou funkciou, preto sa na pomenovanie hry niekedy používa značenie v.

Príklad 1.3. Predpokladajme, že máme think-thank s n analytikmi, z ktorých každý pokrýva jednu konkrétnu krajinu. Nech každý analytik zarobí rovnakú sumu b CZK, zoberme potom charakteristickú funkciu $v(S) = b\,|S|$, kde S je počet analytikov. Je zrejmé, že $v(\emptyset) = b\,|\emptyset| = 0$.

Inými slovami, jedinou podmienkou pre charakteristickú funkciu je, aby bol zisk prázdnej koalície nulový.

[1] Z angl. transferable utility games.

Vybrané vlastnosti kooperatívnych hier

Definícia 1.4. Hra (N, v) sa nazýva *aditívna*, ak pre $S, T \subseteq N$ a $S \cap T = \emptyset$ platí

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T). \tag{1.2}$$

V prípade, že platí

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \tag{1.3}$$

hru (N, v) nazveme *superaditívnou.*

Ďalej v práci budeme uvažovať len hry, ktoré napĺňajú vlastnosť superaditivity.

Superaditivita (aditivita) okrem iného vyjadruje, že tvorbou koalície je dosiahnutý väčší (rovný) zisk, ako je súčet ziskov jednotlivých hráčov nesformovaných do koalície, resp. že väčšia koalícia získa viac (rovnako), ako je súčet ziskov menších koalícií. Hry podľa toho rozdeľujeme na *podstatné* a *nepodstatné*.

Definícia 1.5. Nech v je charakteristická funkcia hry (N, v), kde N je množina všetkých hráčov. Hru nazveme *nepodstatnou* ak pre každú $S \subseteq N$ platí

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}). \tag{1.4}$$

Hra je *podstatná* ak pre funkciu v platí

$$v(S) > \sum_{i \in S} v(\{i\}). \tag{1.5}$$

Tvrdenie 1.6. *Hra je nepodstatná práve vtedy, keď je aditívna.*

Dôkaz. Dá sa ľahko ukázať, že keď $S, T \subset N$ a $S \cap T = \emptyset$, potom platí

$$\begin{aligned}
v(N) &= \sum_{i=1}^{n} v(i) && \text{priamo z definície (1.4)} \\
&= \sum_{i \in S} v(i) + \sum_{i \in T} v(i) + \sum_{i \in N \setminus (S \cup T)} v(i) \\
&\leq v(S) + v(T) + v(N \setminus (S \cup T)) && \text{plynie zo superaditivity (1.3)} \\
&\leq v(S \cup T) + v(N \setminus (S \cup T)) && \text{plynie zo superaditivity (1.3)} \\
&\leq v(N).
\end{aligned}$$

Teda dostávame rovnosť

$$\begin{gathered}
v(S) + v(T) + v(N \setminus (S \cup T)) = v(S \cup T) + v(N \setminus (S \cup T)) \\
v(S) + v(T) = v(S \cup T).
\end{gathered}$$

Opačný smer platí triviálne. □

Je zrejmé, že ak má mať pre hráčov pripojenie sa ku koalícii zmysel, každý hráč $i \in N$ bude požadovať aspoň $v(\{i\})$ zo zisku a tým bude rozdelenie $v(N)$ jednoznačne určené.

Pomenovanie *nepodstatné* hry naznačuje, že sú z hľadiska analýzy prerozdelenia zisku nedôležité, čo je odôvodnené touto jednoduchosťou riešenia.

Ďalej preto budeme uvažovať hry podstatné, kde hráči spoločne môžu získať viac ako by získali jednotlivo. Zisk si potom medzi sebou rozdelia. Na popis tohto rozdelenia zavedieme vektor možných výplat - ***imputáciu***.

Definícia 1.7. *Imputácia* pre hru (N, v) n hráčov je vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ktorý spĺňa

(i) $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$ (kolektívna racionalita)

(ii) $x_i \geq v(\{i\})$ pre všetky $i \in N$ (individuálna racionalita)

Množinu všetkých imputácií budeme značiť $E(v)$.

Príklad 1.8. V oblasti Južného Kaukazu pôsobia 3 spravodajcovia a každý z nich je schopný pokryť 35% územia, ich pôsobnosť sa prekrýva v politicky komplikovaných oblastiach. Finančné ohodnotenie spravodajcov závisí od toho, koľko % územia pokryje správa, ktorú zašlú analytikom. Pre relevantnú analýzu je potrebné, aby bolo zmapovaných aspoň 65% územia, aby sa dala o regióne vytvoriť reálna predstava (pri zmapovaní menšieho územia je správa bezcenná a finančne nebude ohodnotená).
Charakteristická funkcia hry teda bude mať nasledujúci tvar:

$$v(\{1\}) = 0, \qquad v(\{2\}) = 0, \qquad v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 70, \qquad v(\{1,3\}) = 70, \qquad v(\{2,3\}) = 70,$$

$$v(\emptyset) = 0, \qquad v(\{1,2,3\}) = 100$$

Vyjadríme množinu všetkých imputácií $E(v)$.

$x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3) = 100,$ (spĺňa kolektívnu racionalitu)
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$ (spĺňa individuálnu racionalitu)

$$E(v) = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 100, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Imputácií môže existovať nekonečne mnoho. Z hľadiska hráčov je však podstatné nájsť medzi imputáciami také rozdelenie zisku, aby bolo pre nich čo najvýhodnejšie. Na riešenie existuje viac možností a konceptov, z ktorých si v nasledujúcej časti predstavíme dva najpoužívanejšie.

1.2 Koncepty riešenia

Poznámka. Uvažujeme kooperatívne hry definované na multidimenzionálnom euklidovskom vektorovom priestore kooperatívnych hier $\mathscr{G}^N$.

1.2.1 Jadro

Jadro hry, ako koncept riešenia v teórii hier, hľadá výplatný vektor pre veľkú koalíciu. Cieľom je nájsť riešenie smerujúce k situácii kedy nie je výhodné pre žiadnu subkoalíciu aby sa vyčlenila od veľkej, pretože by tým nedosiahla väčší zisk.

Definícia 1.9. *Jadro* hry $v \in \mathscr{G}^N$ je množina všetkých n-rozmerných imputácií x, ktoré spĺňajú

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \tag{1.6}$$

a pre každú koalíciu $S \subseteq N$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S). \tag{1.7}$$

Jadro označíme $\mathcal{C}(v)$.

Príklad 1.10. V medzinárodnej politike je veľmi dôležitým rozhodovacím orgánom Rada bezpečnosti OSN. V súčasnosti má 15 členov, z ktorých je 5 stálych členov (Čína, Francúzsko, Rusko, USA a Veľká Británia) a 10 rotujúcich členov. Stály členovia majú možnosť vetovať akékoľvek rozhodnutie (takže na schválenie nejakého návrhu musia všetci piati stály členovia súhlasiť).

Označme stálych členov v abecednom poradí 1,2,3,4,5. Charakteristická funkcia bude mať hodnotu 1 v prípade, že návrh je schválený a 0 v opačnom prípade.

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \{1,2,3,4,5\} \subset S \text{ a zároveň } |S| \geq 8 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Zjednodušme model rozhodovania v RB OSN na hru 3 hráčov s podobnou štruktúrou, kedy hráč 1 je člen s právom veta a hráči 2 a 3 sú rotujúci členovia. Rozhodovanie bude väčšinové, teda dostaneme funkciu:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ak } 1 \in S \text{ a zároveň } |S| \geq 2 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Jadro hry vyjadríme tak, aby bola splnená podmienka 1.6

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{1.8}$$

a podmienka 1.7

$$x_1 + x_2 \geq 1, \tag{1.9}$$

$$x_1 + x_3 \geq 1, \tag{1.10}$$

$$x_2 + x_3 \geq 0,$$

$$x_i \geq 0. \tag{1.11}$$

Keďže 1.8 a 1.9 musia platiť zároveň a vzhľadom k 1.11 nikto nemôže dostať zápornú hodnotu, musí platiť

$$x_3 = 0.$$

Obdobným spôsobom si x_2 vyjadríme z 1.10 a 1.8, kde opäť dostávame

$$x_2 = 0.$$

Je teda zrejmé, že

$$x_1 = 1.$$

Keď chceme vyjadriť jadro pre rokovanie RB OSN s 15 členmi, postupujeme obdobne. Výsledkom by bolo rozdelenie kompletného zisku medzi hráčov 1 - 5 (stálych členov) a desiati rotujúci by dostali hodnotu 0 [12].

Takýmto spôsobom si dokážeme vyjadriť jadro pre každú hru. Jadro nemusí byť jednoznačne určené a môže to byť aj prázdna množina.

Príklad 1.11. Pripomeňme si príklad 1.8 s charakteristickou funkciou:

$$v(\{1\}) = 0, \qquad v(\{2\}) = 0, \qquad v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = 70, \qquad v(\{1,3\}) = 70, \qquad v(\{2,3\}) = 70,$$
$$v(\emptyset) = 0, \qquad v(\{1,2,3\}) = 100$$

Vychádzajúc opäť z 1.7 a 1.6 určíme jadro hry.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_1 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 70, \qquad x_1 + x_3 \geq 70, \qquad x_2 + x_3 \geq 70$$

Aj napriek tomu, že $E(v)$ obsahovala nekonečne mnoho imputácií, jadro $\mathcal{C}(v)$ je prázdna množina.

Ukázali sme si jednu z možností riešenia - jadro, ktorého veľkou prednosťou je vysoká stabilita. Ale keďže riešením môže byť aj prázdna množina, budeme ďalej hľadať iné možnosti výplatného rozdelenia.

1.2.2 Shapleyho hodnota

Ďalším známym konceptom je Shapleyho hodnota, ktorá na rozdiel od jadra nestavia na tom, aby dala hráčom stimuly k pripojeniu sa ku veľkej koalícii, ale vyjadruje v podstate férové rozdelenie. Výplata jednotlivých hráčov závisí na tom, akú hodnotu majú pre každú možnú koalíciu.

Shapleyho hodnota poskytuje apriorné ohodnotenie koaličných hier. Lloyd Shapley, vo svojom prelomovom príspevku z roku 1953, predstavil 3 axiómy popisujúce vlastnosti a správanie rozdelenia zisku, ktorých splnenie sformuluje pre každú hru jedinečné riešenie. Axiomatické zadanie Shapleyho hodnoty odvodíme podľa [14] a [13].

Najskôr je potrebné zaviesť pojmy *hodnota*, *nositeľ*[2] a *permutovaná hra*[3].

Definícia 1.12. *Hodnota* je funkcia $\varphi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$, ktorá priradí každej kooperatívnej hre v práve jednu alokáciu $\varphi(v) \in \mathbb{R}^N$.

Definícia 1.13. *Nositeľom* hry $v \subset \mathcal{G}^N$ je koalícia $R \subset N$ vtedy, keď pre všetky $S \subset N$ platí

$$v(S \cap R) = v(S).$$

[2] Z definície budeme vychádzať pri Shapleyho prvom axióme.
[3] Z definície budeme vychádzať pri Shapleyho druhom axióme.

Nositeľ je teda podmnožina R taká, že všetci hráči, ktorí do nej nepatria sú v hre v tzv. "dummies"[4] pretože ich príspevok do koalície nezmení jej hodnotu. Teda ak R je nositeľ a $i \notin R$, potom $v(\{i\}) = 0$.

Definícia 1.14. Uvažujme hru n-hráčov charakterizovanú funkciou v, nech π je ľubovolná permutácia na N. Pre každú hru $v \in \mathscr{G}^N$ je potom πv permutovaná hra $u \in \mathscr{G}^N$ taká hra, že pre akúkoľvek koalíciu $S = \{i_1, i_2, ..., i_s\} \subset N$ je splnená rovnosť

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), ..., \pi(i_s)\}) = v(S).$$

Definícia nám hovorí, že rola každého hráča i je v hre v v podstate rovnaká ako hráča $\pi(i)$ v u.

Vychádzajúc z uvedených definícií, môžeme zaviesť Shapleyho axiómy.

Shapleyho axiómy

Pod hodnotou hry v budeme rozumieť n-rozmerný vektor $\varphi(v)$ spĺňajúci podmienky:

1. Ak R je ľubovoľný nositeľ v, potom

$$\sum_{i \in R} \varphi_i(v) = v(R). \tag{1.12}$$

   Prvý axióm hovorí, že hráči patriaci do nositeľa R by si mali rozdeliť zdieľanú hodnotu (rovnú hodnote veľkej koalície) medzi seba a nedať nič "dummies".

2. Pre ľubovoľnú permutáciu π a ľubovoľné $i \in N$ platí

$$\varphi_{\pi(i)}(\pi v) = \varphi_i(v). \tag{1.13}$$

   Druhý axióm hovorí, že v hre záleží len na role hráča akú zohráva, na jeho hodnote. Neberie sa do úvahy meno alebo označenie.

3. Pre ľubovoľné hry charakterizované funkciami u a v platí

$$\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v). \tag{1.14}$$

Tvrdenie 1.15. *Existuje práve jedna funkcia $\varphi : \mathscr{G}^N \to \mathbb{R}^N$ daná pre každú hru, ktorá spĺňa axiómy 1.12,1.13,1.14. Pre všetkých hráčov hráčov $i \in N$ a každú $v \in \mathscr{G}^N$ sa dá vyjadriť*

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq 2^N \\ i \in S}} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N!|} (v(S) - v(S \setminus \{i\})). \tag{1.15}$$

Takto jednoznačne určenú hodnotu nazveme *Shapleyho hodnota*.

Dôkaz. Na dokázanie Tvrdenia 1.15 zavedieme nasledujúce lemmy:

[4]Slovenský ekvivalent slova je ťažko nájsť, pojem popisuje hráča zbytočného, neužitočného.

Lemma 1.16. Nech je hra w_S pre každú koalíciu S definovaná takto:

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{pre } S \subset T \\ 0 & \text{pre } S \not\subset T. \end{cases}$$

Potom, ak $s = |S|$,

$$\varphi_i(w_S) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{pre } i \in S \\ 0 & \text{pre } i \notin S. \end{cases}$$

Dôkaz. Je zrejmé, že S je nositeľom hry. Z 1.12 plynie

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(w_S) = 1.$$

Ak π je ľubovolná permutácia na S, je tiež zrejmé, že $\pi w_S = w_S$ a podľa 1.13 teda $\varphi_i(w_S) = \varphi_j(w_S)$ pre všetky $i, j \in S$. Keďže týchto podmienok je s a ich suma dáva dokopy 1, vyplýva:

$$\varphi_i(w_S) = \frac{1}{s} \text{ pre } i \in S.$$

□

Dôsledok 1.17. *Ak $c > 0$, potom*

$$\varphi_i(cw_S) = \begin{cases} \frac{c}{s} & \textit{pre } i \in S \\ 0 & \textit{pre } i \notin S. \end{cases}$$

Lemma 1.18. Ak v je ľubovolná hra a $S \subset N$, potom existuje $2^N - 1$ reálnych čísel c_S takých, že:

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$$

kde je w_S definované ako v lemme 1.16.

Dôkaz. Chceme ukázať, že

$$c_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T), \qquad t = |T|,\ s = |S|, \tag{1.16}$$

vyhovuje lemme.

Ak zvolíme ľubovolnú koalíciu $U, u = |U|$,

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} c_S w_S(U) = \sum_{S \subset U} c_S &= \sum_{S \subset U} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right) \\ &= \sum_{T \subset U} \left(\sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} \right) v(T). \end{aligned}$$

Vezmime zátvorku z posledného výrazu, pre každú hodnotu s, ktorá je medzi t a u, budeme mať $\binom{u-t}{u-s}$ množín S s počtom prvkov s (pre množiny platí $T \subset S \subset U$). Takže zátvorku môžeme nahradiť výrazom

$$\sum_{s=t}^{u} \binom{u-t}{u-s} (-1)^{s-t},$$

ktorý je vlastne binomickým rozšírením výrazu $(1-1)^{u-t}$.
Takže pre všetky $t < u$ dostaneme nulu a pre $t = u$ dostaneme 1. Pre všetky $U \subset N$ teda máme

$$\sum_{S \subset N} c_S w_S(U) = v(U).$$

$\square$

Pokračujeme dôkazom tvrdenia 1.15. Lemma 1.16 ukazuje, že každá hra môže byť zapísaná ako lineárna kombinácia hier w_S. Lemma 1.18 hovorí, že pre tieto hry w_S je funkcia φ je jednoznačne definovaná. Ak sú niektoré z koeficientov c_S záporné, vyjadríme ich podľa 1.14: $\varphi_i(u - v) = \varphi_i(u) - \varphi_i(v)$. Funkcia φ je potom jednoznačne definovaná pre všetky hry v v podobe:

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S,$$

teda podľa 1.12,1.13 a lemmy 1.16.

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N} c_S \varphi_i(w_S) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} c_S \cdot \frac{1}{s}.$$

V 1.16 sme definovali c_S a substitúciou dostaneme:

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{1}{s} \left\{ \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right\}$$

$$\varphi_i(v) = \sum_{T \subset N} \left\{ \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t} \, \frac{1}{s} \, v(T) \right\}. \tag{1.17}$$

Z toho môžeme napísať pre podmnožinu T

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t} \frac{1}{s}.$$

Vidíme, že ak uvažujeme množinu $\tilde{T}$ takú, že $i \notin \tilde{T}$ a $T = \tilde{T} \cup \{i\}$, v T je $\tilde{t} - 1$ členov, mení sa znamienko a platí $\gamma_i(\tilde{T}) = -\gamma_i(T)$. Spätným dosadením do 1.17 dostaneme

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \gamma_i(T) \, (\, v(T) - v(T \setminus \{i\}) \,). \tag{1.18}$$

Pre $i \in T$ existuje presne $\binom{n-t}{s-t}$ koalícií S, takých, že $T \subset S$ (pripomeňme, že $s = |S|, t = |T|$). Teda máme:

$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} \frac{1}{s} = \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} \int_0^1 x^{s-1} dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} x^{s-1} dx = \int_0^1 x^{t-1} \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} x^{s-t} dx$$
$$= \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx.$$

Z tohto známeho určitého integrálu dostaneme:

$$\gamma_i(T) = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

a teda po dosadení do 1.18

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \ (\ v(T) \setminus v(T - \{i\}) \ ),$$

čo nám dáva v zavedenom značení explicitne hodnotu 1.15:

$$\varphi_i\left(v\right) = \sum_{\substack{S \subseteq 2^N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N!|} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

□

Výpočet hodnoty môžeme interpretovať napríklad ako postupné zhromaždenie veľkej koalície do jednej miestnosti. Dvere do miestnosti sú také malé, že cez ne naraz prejde len jeden hráč, preto sa hráči (prvky množiny N) pred dverami náhodne postavia do radu (permutácie hráčov). Existuje teda $|N|!$ rôznych spôsobov ako sa hráči môžu zoradiť. Keď si zoberieme konkrétneho hráča i, pre každú podmnožinu S - hráčov stojacich v rade pred ním, existuje $(|S|-1)!(|N|-|S|)!$ možností ako sa zoradiť (keď S vstúpi do miestnosti,$|N|-|S|$ stoja pred ňou a jeden hráč i vstupuje). Keď hráč i vstúpi do miestnosti stáva sa tiež členom koalície S a jeho marginálny príspevok ku hodnote je $(v(S)) - v(S \setminus \{i\})$. Shapleyho hodnota je teda pre každého hráča vyjadrený jeho marginálny príspevok keď vstúpi do miestnosti. Hodnota $\varphi_i(v)$ je priemerná hodnota, ktorú hráč i prinesie do veľkej koalície, za predpokladu, ak ostatní hráči vytvárali túto koalíciu v náhodnom poradí.

Shapley túto hodnotu interpretuje ako riešenie, ktoré ohodnotí pozíciu hráča v hre berúc do úvahy jeho strategické možnosti a vyjednávaciu pozíciu s ohľadom na zisky dosiahnuteľné prostredníctvom spolupráce [17].

Príklad 1.19. Budeme uvažovať rovnaké zadanie ako v príklade 1.10 zjednodušené na 3 hráčov. S použitím 1.15 postupne vyčíslime Shapleyho hodnotu pre danú hru (N, v).
Pre hráča 1 dostaneme:

$$\varphi_1 = \frac{(|\{1\}|-1)!(|\{1,2,3\}|-|\{1\}|)!}{(|\{1,2,3\}|)!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) +$$
$$+ \frac{(|\{1,2\}|-1)!(|\{1,2,3\}|-|\{1,2\}|)!}{(|\{1,2,3\}|)!}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) +$$
$$+ \frac{(|\{1,3\}|-1)!(|\{1,2,3\}|-|\{1,3\}|)!}{(|\{1,2,3\}|)!}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{(|\{1,2,3\}|-1)!(|\{1,2,3\}|-|\{1,2,3\}|)!}{(|\{1,2,3\}|)!}(v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})) = \\
&= \frac{0!2!}{3!}(0-0) + \frac{1!1!}{3!}\left[(1-0)+(1-0)\right] + \frac{2!0!}{3!}(1-0) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Rovnako postupujeme pri výpočte hodnoty pre hráčov 2,3:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{0!2!}{3!}(0-0) + \frac{1!1!}{3!}\left[(1-0)+(0-0)\right] + \frac{2!0!}{3!}(1-1) = \frac{2}{3} \\
\varphi_3 &= \frac{0!2!}{3!}(0-0) + \frac{1!1!}{3!}\left[(0-0)+(1-0)\right] + \frac{2!0!}{3!}(1-1) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Pre zadanú hru dostávame Shapleyho vektor $\varphi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

Vidíme, že sme dostali iné výplatné rozdelenie ako keď sme pre rovnakú hru počítali jadro. Ako jadro $\mathcal{C}(v)$ sme dostali $x = (1, 0, 0)$, čo bolo rozdelenie stabilné, pretože zaisťovalo účasť hráča 1 v koalícií a pre hráčov 2,3 je jedinou možnosťou vytvoriť s ním koalíciu, pretože inak by ich zisk zostal určite nulový.

Shapleyho vektor rozdeľuje zisk medzi všetkých hráčov. Predstavuje alokáciu, ktorá zároveň vypovedá aj o hodnote a význame jednotlivých hráčov pre koalíciu. Hráči 2 a 3 majú zaručený podiel na výplate, pretože na jej zisk je potrebná nadpolovičná väčšina, čiže aspoň jeden z hráčov 2,3 musí byť členom koalície. Bez účasti aspoň jedného z nich by zostal zisk nulový, takže aj oni produkujú nejakú hodnotu, za čo by im mala byť daná odmena. Každý hráč tak má koaličný potenciál, ktorý Shapleyho hodnota vyčísľuje a zohľadňuje.

Z príkladu 1.19 vidíme, že hráčovi 1 bol prisúdený najväčší podiel, pretože je pre koalíciu najdôležitejší, čo zodpovedá výsledkom z príkladu 1.10, kde dostal celý zisk.

Ukázali sme si dva najznámejšie spôsoby riešenia rozdelenia hodnoty výplatnej funkcie. *Jadro* sa vyznačuje svojou stabilitou, kedy každý hráč v koalícii dostane minimálne to, čo generuje samostatne, preto nie je výhodné koalíciu opúšťať. *Shapleyho hodnota* býva označovaná ako férové rozdelenie, pretože vychádza z marginálnych príspevkov, ktorými hráči do koalície prispievajú [11].

Na objasnenie pojmov boli použité príklady tzv. *jednoduchých hier*, kedy hra je jednoduchá ak pre každú $S \subset N$ je $v(S) = 0$ alebo $v(S) = 1$. Jednoduché hry majú v oblasti aplikácie teórie hier v medzinárodných vzťahoch a politike veľké zastúpenie (napr. pri tvorbe parlamentných koalícií, hlasovaní v inštitúciách medzinárodného spoločenstva a pod.). V ďalšej časti sa budeme zaoberať trochu inými prípadmi, ktoré do tejto kategórie nespadajú a pokúsime sa rozšíriť pole možností aplikovať koncept Shapleyho hodnoty aj na hry, ktoré nie sú jednoduché.

2 Aplikácia na lokálne konflikty a spoluprácu

V nasledujúcej kapitole bude predostretých niekoľko hypotetických príkladov, v ktorých bude prostredníctvom konceptu kooperatívnej teórie hier nahliadané na potenciálnu spoluprácu štátov a tvorbu aliancií. Budeme vyhodnocovať silu samostatných hráčov, následne koalícií a potom pomocou Shapleyho vektoru posudzovať prínos a hodnotu jednotlivých hráčov.

V priebehu histórie predstavovali aliancie a dohody základ takmer každej vojny. Prípady, v ktorých by štát vstúpil do konfliktu bez spojencov, sú veľmi sporadické. V disciplíne medzinárodných vzťahov existuje množstvo autorov, ktorí sa podmienkami a okolnosťami tvorby koalícií zaoberajú. Za najdôležitejšie faktory pôsobiace pri ich formovaní je považovaná ***ofenzívna sila*** jednotlivých štátov, ich ***geografická*** a tiež ***ideologická blízkosť*** [19]. Je však dôležité mať stále napamäti, že pri tvorbe koalícií je hodnota jednotlivých hráčov do obrovskej miery ovplyvnená tým, za akým účelom a za akých podmienok koalícia vzniká.[5]

Na demonštráciu bude ďalej zostavená koaličná funkcia s ohľadom na základné a všeobecné faktory pôsobiace na vznik aliancií. Funkciu by pri aplikácii na reálne prípady bolo potrebné dopĺňať a modifikovať s prihliadnutím na konkrétne okolnosti daného prípadu.

2.1 Meranie sily jednotlivých štátov

Moc konkrétneho štátu pre jeho účasť resp. nezahrnutie do koalície zohráva veľmi dôležitú úlohu. Pojem moci, považovaný za centrálny pri vysvetľovaní konfliktov, je však vo všeobecnosti extrémne ťažko uchopiteľný koncept. Jeho definícia sa vyvíjala s vývojom konfliktov a premenou spoločnosti.[6] Stretávame sa s viacerými prístupmi ako moc štátu operacionalizovať a následne kvantifikovať.

Komplexné zhodnotenie moci, najmä na základe dobre kvantifikovateľných materiálnych zdrojov, používa David Singer v projekte Correlates of War (1963) [18]. Skonštruovaný index CINC (Composite Index of National Capability) vychádza zo šiestich charakteristík pre každú krajinu: celková populácia (TPR), mestská populácia (UPR), produkcia železa a ocele (ISPR), spotreba primárnych zdrojov energie (ECR), výdaje na obranu (MER), početnosť vojenských zložiek (MPR). Premenné predstavujú pomer hodnoty pre danú krajinu ku celému svetu $RATIO = \frac{krajina}{svet}$.

$$CINC = \frac{TPR + UPR + ISPR + ECR + MER + MPR}{6}$$

Vidíme, že index kombinuje tri dimenzie: atribúty, ktoré môžu ostatné štáty ovplyvňovať krátkodobo, v strednedobom horizonte a aj dlhodobo. V krátkodobom výhľade ide o reflektovanie vojenskej sily (vojenské výdaje, početnosť vojenských zložiek), v tom strednedobom je podstatná priemyselná aktivita (produkcia železa a ocele, spotreba primárnych zdrojov energie) a z dlhodobej perspektívy zaváži demografické faktory (celková populácia, mestská populácia).

[5]Napríklad rozlohou malý, ekonomicky slabší, ale demokratický štát môže mať veľkú hodnotu ako spojenec nejakej aliancie v nepriateľskom regióne. Alebo ak je tým aktérom, ktorý má zohrať úlohu ručičky na váhach, má hodnotu nerecipročnú k jeho kapacitám.

[6]Pôvodná definícia predložená Thukidydom, ktorá moc stotožňovala s vojenskou silou, bola postupne dopĺňaná o dimenzie schopnosti si ju udržať (Machiavelli), ekonomickej sily (Hobbes), kontroly nad názorom (Carr, Morgenthau).

2.2 Geografická a ideologická blízkosť

Pojem geografickej blízkosti netreba detailnejšie špecifikovať. Podobné geografické determinanty zapríčinené touto blízkosťou majú často za výsledok aj konvergenciu záujmov, čo môže pôsobiť pozitívne na kooperáciu. Na druhej strane ale blízkosť území vytvára priestor na konfliktnú interakciu. Podobne nejednoznačné je to aj so spoločnými hranicami štátov. Z toho dôvodu ako významný faktor vstupuje ideológia jednotlivých krajín. Podľa Kantovej teórie demokratického mieru[7] budeme predpokladať, že demokratické režimy nemajú tendencie ku konfliktnému správaniu a to v našich výpočtoch ďalej zohľadníme. Hypotéza tvrdiaca, že čím je režim demokratickejší, tým menej je konfliktný, však nebola empiricky potvrdená, takže okrem demokracií sa budeme zaoberať viacerými typmi režimov. Na posudzovanie bude použitý demokratický index podľa *Freedom House* [9] a klasifikácia krajín z hľadiska tranzitívnosti režimu.

2.3 Vyjadrenie sily štátu

Po zohľadnení vyššie zmienených teoretických východísk, budeme charakteristickú funkciu, predstavujúcu zisk vo forme zaistenia bezpečnosti, pre koalície určovať nasledovne:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c \cdot CINC(i) + k^{PR} + NATO + EU \tag{2.1}$$

Vzťah bude použitý len pre koalície $|S| \geq 2$ a pre jedného hráča, teda $|S| = 1$, to bude priamo jeho hodnota CINC.

Index CINC je pomerom krajiny k celému svetu, teda je pre jednotlivé krajiny vyjadrený v tisícinách alebo desaťtisícinách. Aby sme výpočet zjednodušili, hodnota CINC bude vynásobená v jednotlivých prípadoch konštantou c a po prenásobení budeme pracovať s dvojcifernými číslami. Pri definovaní ďalších členov výpočtu budeme brať do úvahy, že sme index multiplikovali a vzhľadom k tejto úprave stanovíme ich hodnoty.

Výraz k^{PR} zohľadňuje povahu režimu krajín, ktoré spoločne vytvoria koalíciu. Ohodnotenie povahy režimu definujeme ako $PR = \min_{i \in S} H(i)$, kde H predstavuje klasifikáciu stability a povahy režimu. Musíme prihliadať na ten najmenej stabilný režim, pretože v prípade jeho pádu, to môže byť osudné pre celú koalíciu. Podľa správy *Freedom House* sú režimy rozdelené do piatich kategórií: konsolidované demokracie, semi-konsolidované demokracie, tranzičné/hybridné režimy, semi-konsolidované autoritatívne režimy a konsolidované autoritatívne režimy. Spolupráca medzi konsolidovanými a semi-konsolidovanými demokraciami bude považovaná za bonus pre koalíciu. Hybridný režim predstavuje riziko, ktoré je len o trochu menšie ako pri semi-konsolidovanom autoritatívnom režime, kvôli veľkej nestabilite a konfliktnosti týchto usporiadaní. Konsolidovaný autoritatívny režim vyhodnotíme ako menej rizikový, pretože napriek nedemokratickosti, predstavuje stabilný režim a tak by mohol predstavovať spoľahlivejšieho koaličného partnera.

[7] Podrobnosti teórie popisuje veľké množstvo autorov, viď. napríklad Cashman, s. 87-94 [6].

Premenná H môže nadobúdať nasledujúce hodnoty[8]:

$$H = \begin{cases} 2 & \text{pre konsolidovanú demokraciu} \\ 1 & \text{pre semi-konsolidovanú demokraciu} \\ -1 & \text{pre hybridný režim} \\ -0,5 & \text{pre semi-konsolidovaný autoritatívny režim} \\ 0,5 & \text{pre konsolidovaný autoritatívny režim} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Premenná k predstavuje počet členov v koalícii, teda $k = |S|$.

Ako ďalší významný faktor bude zahrnuté členstvo krajín v medzinárodných organizáciách. V prípade, že všetky krajiny koalície sú členmi, bude koalícii pripočítaný bonus p alebo $\frac{p}{2}$, pričom hodnota p je priemerná hodnota CINC v danom regióne.

$$NATO = \begin{cases} p & S \text{ je členom NATO} \\ 0 & inak \end{cases}$$

$$EU = \begin{cases} \frac{p}{2} & S \text{ je členom EU} \\ 0 & inak \end{cases}$$

Podľa zostavenej funkcie môžeme vyjadriť silu pre rôzne krajiny a ich potenciálne koalície. Pri získavaní potrebných dát si ako referenčný bod stanovíme rok 2012.

2.4 Príklady

2.4.1 Škandinávia

Predstavme si hypotetickú situáciu, kedy by sa škandinávske nerastné bohatstvo stalo terčom geopolitických ašpirácií iných mocností. Dánsko, Fínsko, Nórsko aj Švédsko mobilizujú svoje sily k obrane s využitím celého potenciálu národnej sily. Ako pomôže vytvorenie koalície krajinám v obrane územia? Ktorá vytvorením koalície najviac získa a pre koho by bola najmenej výhodná? Zisk koalície vnímame v bezpečnosti, ktorú zaistí pre jednotlivé krajiny a celý región.

Označme si Dánsko ako hráča číslom 1, Fínsko číslom 2, Nórsko číslom 3 a Švédsko číslom 4. Máme teda množinu hráčov N= {1,2,3,4}.

Na vyčíslenie ich národnej sily použijeme index CINC, ktorý nájdeme v databáze projektu *Correlates of War* [18].

Tab. 1: Vyčíslenie národnej sily - Škandinávia, Zdroj: vlastný

	Dánsko 1	Fínsko 2	Nórsko 3	Švédsko 4
CINC$\cdot 10^4$	$10,774$	$15,489$	$16,982$	$21,301$

[8] Na definíciu typu režimu bola použitá klasifikácia *Freedom House*. Dostupné z: https://freedomhouse.org/sites/default/files/Map%20of%20Regime%20Classifications%20NIT%202012.pdf

V tomto prípade položíme $c = 10^4$, zaokrúhlime na celé čísla, kvôli zjednodušeniu výpočtu.

$$v(\emptyset) = 0 \qquad v(\{1\}) = 11 \qquad v(\{2\}) = 15 \qquad v(\{3\}) = 17 \qquad v(\{4\}) = 21$$

Charakteristická funkcia 2.1 priradí každej koalícii hodnotu.

$$v(\{1,2\}) = 38 \qquad v(\{1,3\}) = 48 \qquad v(\{1,4\}) = 44 \qquad v(\{2,3\}) = 36$$
$$v(\{2,4\}) = 48 \qquad v(\{3,4\}) = 42 \qquad v(\{1,2,3\}) = 52$$
$$v(\{1,2,4\}) = 64 \qquad v(\{1,3,4\}) = 58 \qquad v(\{2,3,4\}) = 62$$
$$v(\{1,2,3,4\}) = 80$$

Už z vyjadrenia charakteristickej funkcie môžeme vidieť, že veľká koalícia je pre všetkých hráčov najvýhodnejšia a teda najbezpečnejšia. Jej zisk $v(N) = 80$ je podstatne väčší ako by bol zisk jednotlivých hráčov v súčte ($\sum\limits_{i \in N} v(i) = 64$), nejedná sa teda o jednoduchú hru a má pre nás ďalej význam riešiť rozdelenie zisku.

Navýšenie zisku pochádza z výhody plynúcej zo stabilných demokratických režimov škandinávskych zemí[9], keďže Nórsko nie je členom EU a Švédsko s Fínskom nie sú členmi NATO a teda veľká koalícia nemôže naplno využiť benefity, ktoré poskytuje členstvo v týchto medzinárodných organizáciách. Keď sa pozrieme napríklad na zisk koalície bez Nórska, $v(\{1,2,4\}) = 64$, táto koalícia svoju bezpečnosť navýši až o 17 bodov. Nezahrnutie niektorej z krajín by však mohlo priniesť regiónu destabilizáciu a mať negatívne dopady.

Aby sme zodpovedali aj druhú otázku, spočítame Shapleyho hodnotu podľa odvodeného vzorca 1.15, ktorá vyčísli hodnotu jednotlivých hráčov pre koalíciu.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(v) = {} & \left(\frac{(1-1)!(4-1)!}{4!}(11-0)\right) + \left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(38-15)\right) + \\
& + \left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(48-17)\right) + \left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(44-21)\right) + \\
& + \left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(64-48)\right) + \left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(52-36)\right) + \\
& + \left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(58-42)\right) + \left(\frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}(80-62)\right) + \\
& = \frac{53}{3}
\end{aligned}$$

$$\varphi_2(v) = \frac{57}{3}$$

$$\varphi_3(v) = \frac{55}{3}$$

[9] Škandinávia sa vyznačuje silnou demokraciou a jej špecifickým modelom regiónu vlastným, ktorý je veľmi efektívny. V roku 2012 sa podľa *The Economist Intelligence Unit* a ich hodnotenia demokratického indexu umiestnili Nórsko a Švédsko na 1. a 2.mieste, Dánsko bolo 4. a Fínsko bolo na 9.pozícií. Celý rebríček dostupný na: http://pages.eiu.com/rs/eiu2/images/Democracy-Index-2012.pdf

$$\varphi_4(v) = \frac{75}{3}$$

Získavame Shapleyho vektor $\varphi(v) = \left(\frac{53}{3}, \frac{57}{3}, \frac{55}{3}, \frac{75}{3}\right)$.

Obr. 1: Vyjadrenie Shapleyho hodnoty - Škandinávia, Zdroj: [7], vlastný

Aby sme sa mohli názornejšie zamyslieť nad tým, čo jednotlivé hodnoty znamenajú, pripomeňme si hodnoty, ktoré jednotlivé krajiny do koalície prinášali $\left(\frac{33}{3}, \frac{45}{3}, \frac{51}{3}, \frac{63}{3}\right)$. Vidíme, že veľká koalícia prináša najväčší zisk Dánsku (hráč 1), ktoré svoj zisk zvýši až o $\frac{20}{3}$. Dánsko sa javí cenným hráčom najmä kvôli tomu, že je ako jediné členom EU aj NATO, čo z neho robí významného spojenca. K zaujímavému výsledku došlo u Fínska (hráč 2) a Nórska (hráč 3), kedy Fínsko do koalície prináša hodnotu $\frac{45}{3}$, teda menšiu ako Nórsko $\left(\frac{51}{3}\right)$ a keď sa pozrieme na Shapleyho hodnoty pre tieto krajiny, väčšiu cenu pre koalíciu má práve Fínsko $\varphi_2 = \frac{57}{3}$. Nórsko, ako jediná krajina nepatriaca do EU, je teda týmto znevýhodnená a môže sa to odraziť na jej postavení v koalícií. Hodnota Švédska sa zvýšila rovnako ako v prípade Fínska o $\frac{12}{3}$, teda im obom patrí štvrtinový podiel na zvýšení celkovej bezpečnosti regiónu, čo je tiež zaujímavé, keďže medzi krajinami je pri vyčíslení ich samostatnej obrannej sily rozdiel 6 bodov.

Podobnými úvahami sa otvára priestor ďalším politickým a strategickým diskusiám o príčinách a následkoch takéhoto výsledku.

2.4.2 Krajiny bývalej Juhoslávie

Balkán patrí už veľmi dlho k nestabilným oblastiam. V histórii 20.storočia, v kontexte balkánskych vojen a vypuknutia prvej svetovej vojny, býva dokonca označovaný za „sud pušného prachu“. Krajiny regiónu sa len prednedávnom vydali na cestu ideového približovania sa k Európe *a demokratizácie. Vzhľadom k ich komplikovanému historickému vývoju je tento proces stále veľmi krehký a je preň nebezpečný každý náznak negatívnych externých zásahov.*

Budeme uvažovať hypotetickú situáciu, kedy by sa obzvlášť citlivé krajiny bývalej Juhoslávie dostali do pozície, v ktorej by ich opäť ohrozoval autoritársky štát snažiaci dostať sa ich do svojej sféry vplyvu, zasahovať do politiky, využívať národné zdroje a tým zvrátiť proces demokratizácie. Aké koalície by štáty vytvorili, aby sa čo najlepšie dokázali brániť? Ktorá z krajín by vytvorenie koalície najviac potrebovala pre zaistenie svojej bezpečnosti?

Bývalá Juhoslávia sa od konca studenej vojny rozpadla vo viacerých vlnách, sprevádzaných konfliktmi a napätím, na 7 štátov. Označíme si ich pre prehľadnosť ako hráčov $1-7$ abecedne a opäť sa najskôr pozrieme na index CINC [18] jednotlivých krajín.

1 - Bosna a Hercegovina
2 - Čierna Hora
3 - Chorvátsko
4 - Kosovo
5 - Macedónsko
6 - Slovinsko
7 - Srbsko

Tab. 2: Vyčíslenie národnej sily - bývalá Juhoslávia, Zdroj: vlastný

	1	2	3	4	5	6	7
CINC$\cdot 10^4$	$3,801$	$0,683$	$4,986$	$0,855$	$2,307$	$4,508$	$8,547$

Keďže krajiny bývalej Juhoslávie predstavujú komplikovanejší celok ako predchádzajúci príklad Škandinávie, musíme sa zamyslieť nad modifikáciou funkcie 2.1. Región sa vyvíjal oddelene od západnej Európy, v špecifických podmienkach vytvorených Titovym režimom, preto sa do západných medzinárodných organizácií začal inkorporovať až po konci studenej vojny. Z toho dôvodu väzby na ne nie sú silné (zatiaľ sú len 2 štáty členmi), preto vo funkcii dáme väčšiu váhu moci krajín jednotlivo a konštantu c zdvojnásobíme, teda $c = 2 \cdot 10^4$.

Priemer p, ktorý používame pri zohľadňovaní členstva v NATO a EU, však vypočítame z hodnôt, ktoré získame zo vzťahu $10^4\cdot$ CINC.[10]

Ďalšiu modifikáciu spravíme špecificky pre koalície, ktoré zahŕňajú Slovinsko (hráč 6), Macedónsko (hráč 5) a Chorvátsko (hráč 3). Keďže tieto krajiny sa od bývalej Juhoslávie odtrhli ako prvé a majú za sebou už viac ako 20 rokov samostatnej správy a politiky, predstavujú pre koalíciu výhodu svojimi skúsenosťami. Preto v prípade, že sa v koalícii nachádzajú všetci traja hráči zároveň, koalícii prirátame bonus v hodnote 3 bodov (bod za každú krajinu).

Zohľadníme aj výhodu Slovinska osobitne, pretože krajina je najstabilnejšou.[11] Jeho prítomnosť v koalícii, v prípade ohrozenia demokratického vývoja regiónu, môže zohrať pozitívnu úlohu, preto budú každej koalícii zahŕňajúcej Slovinsko prisúdené 2 body.

[10]Tak ako sme spravili v prípade Škandinávie, pretože p je používaná pri premennej medzinárodných organizácií, ktorých poskytnutie podpory budeme uvažovať na princípe rovnosti medzi štátmi a spravodlivosti.

[11]Podľa *Freedom House* je krajina jedinou konsolidovanou demokraciou v regióne.

Napokon, s prihliadnutím na etnické, geografické a politické pnutie medzi krajinami v minulosti, sa špeciálne pozrieme na prípad, že by sa im podarilo všetky nezhody prekonať a vytvoriť veľkú koalíciu. Takýto akt by bol v potenciálnom konflikte obrovskou pridanou hodnotou a bude preto predstavovať bonus 7 bodov (za každú krajinu 1).

Po modifikácii charakteristickej funkcie vyjadríme hodnotu jednotlivých hráčov.

$$v(\emptyset) = 0 \qquad v(\{1\}) = 7,6 \qquad v(\{2\}) = 1,4 \qquad v(\{3\}) = 10,0 \qquad v(\{4\}) = 1,7$$
$$v(\{5\}) = 4,6 \qquad v(\{6\}) = 9,0 \qquad v(\{7\}) = 17,1$$

Aby sme spočítali hodnoty pre všetky možné koalície, musíme zohľadniť okrem zmeny konštanty c aj ďalšie dodatočné podmienky, ktoré sme pridali. Pre lepšiu predstavu, uvedieme príklad výpočtu hodnoty pre koalíciu $S = \{1, 3, 5, 6\}$.
V dostupných zdrojoch vyhľadáme dáta a dopočítame všetky potrebné hodnoty.

Tab. 3: Ilustrácia výpočtu účelovej funkcie, Zdroj: vlastný

	$c\cdot$ CINC	H	člen NATO	člen EU
1	7,6	-1	nie	nie
3	10,0	1	áno	áno
5	4,6	-0,5	nie	nie
6	9,0	2	áno	áno

$$p = \frac{\sum_{i\in N} 10^4\cdot \text{CINC(i)}}{|N|} = \frac{3{,}801+0{,}683+4{,}986+0{,}855+2{,}307+4{,}508+8{,}547}{7} = 3,7$$

$$PR = \min_{i\in N} H(i) = \min\{-1; 1; -0,5; 2\} = -1$$

$$v\{1,3,5,6\} = c\cdot (\text{CINC(1) + CINC(3) + CINC(5) + CINC(6)}) + 4^{PR} + 0 + 0 + 3 + 2 = 36,5$$

Podobne postupujeme pre každú koalíciu. Kompletný zoznam koalícií a hodnôt ich charakteristických funkcií je uvedený v Prílohe A.1.

Veľká koalícia bude produkovať hodnotu $v(N) = 63,5$, čím bude mať najväčšiu možnú kapacitu na zaistenie bezpečnosti v regióne. Oproti súčtu hodnôt jednotlivých štátov ($\sum\limits_{i\in N} v(i) = 51,4$), v prípade, že by sa o obranu svojej suverenity snažili samostatne, je navýšená o 12,1 bodov. Zvýšenie pochádza z povahy režimu len vo veľmi malej miere, a to kvôli prítomnosti mimoriadne nestabilnej Bosny a Hercegoviny, ktorá je klasifikovaná ako hybridný režim ($H = -1$). Vytvorenie veľkej koalície je teda prospešné len vďaka účasti Slovinska, Macedónska a Chorvátska na veľkej koalícii a veľkého bonusu za účasť všetkých štátov, ktorý predstavuje 57,85% zisku. Môžeme teda predpokladať, že spomínaní hráči budú mať pre koalíciu najväčšiu cenu, čo opäť spočítame pomocou vzťahu 1.15 a vyjadríme Shapleyho vektor.

$$\varphi(v) = (8,035;\ 2,54;\ 12,315;\ 2,308;\ 7,051;\ 12,983;\ 18,27)$$

Obr. 2: Vyjadrenie Shapleyho hodnoty - bývalá Juhoslávia , Zdroj: vlastný

Vyjadríme si rozdiely medzi $v(\{i\})$ a φ_i: (0,435; 1,14; 2,315; 0,608; 2,451; 3,983; 1,17). Vidíme, že najvýznamnejším hráčom je podľa očakávania Slovinsko (hráč 6), ktorému je prisúdená takmer $\frac{1}{4}$ navýšenia zisku. Vysoká stabilita jeho zriadenia je nesmiernou výhodou najmä v prípadoch ako náš hypotetický príklad, kedy býva práve režim a jeho sloboda napádaná. Silná vláda a inštitúcie predstavujú dobrý základ, ktorý pri obrane nezávislosti krajiny nesmie chýbať. To môže byť jeden z dôvodov, prečo je po vyjadrení Shapleyho vektoru Slovinsko silnejším hráčom ako Chorvátsko (hráč 3), ktorého hodnota ako samostatného hráča prevyšuje tú slovinskú. Najvyšší prínos koalícii predstavuje Srbsko (hráč 7), vďaka sile jeho kvantifikovateľných zdrojov moci vyčíslených v indexe CINC. V tejto pozícii najpodstatnejšieho hráča zostáva. Rozdiel medzi bezpečnosťou, ktorú by si mohlo zaistiť samostatne, a tou, ktorú získa vďaka vytvoreniu koalície, je relatívne malý.

Podobný podiel ako Srbsko má na navýšení zisku aj Čierna Hora (hráč 2), pre ktorú to však predstavuje veľmi významné polepšenie, keďže ide takmer o zdvojnásobenie hodnoty, ktorú by nadobudlo ako samostatný hráč. Koalícia je vďaka podobne podstatnému zvýšeniu bezpečnosti veľmi výhodná aj pre Kosovo (hráč 4).

Výsledok, ktorý sme dostali, opäť môže slúžiť ako podnet k debatám o príčinách a dôsledkoch pre jednotlivé krajiny a koaličné štruktúry. V prípade krajín bývalej Juhoslávie však ide o veľmi hypotetické úvahy, takmer na hrane fikcie, keďže je nepredstaviteľné, že by medzi niektorými krajinami, hlboko znepriatelenými historickým vývojom, došlo k vytvoreniu koalície.

Funkcie pre dané príklady a regióny sú iba načrtnuté a existuje veľké množstvo možností ako ich rozvíjať a zlepšovať. Vidíme však, že vyjadrenie Shapleyho vektoru tak otvára priestor pre mnohé diskusie, ktoré by mohli mať implikácie v oblasti medzinárodných vzťahov.

3 Myersnova hodnota

V predchádzajúcej kapitole bolo demonštrované možné aplikovanie Shapleyho hodnoty na príklady z medzinárodných vzťahov. Pracovali sme s predpokladom, možnosti vzniku akejkoľvek koalície, čo je však z hľadiska sociálnej reality nepravdepodobné. Tento fakt reflektoval Roger B.Myerson a významne tak obohatil koncepty riešenia koaličných hier. Poukázal na rôzne bariéry (geografické, sociologické, či lingvistické), ktoré majú vplyv na vznik koalície a ovplyvňujú tak efektivitu a významnosť koalícií.

Fundamentálne vlastnosti Shapleyho hodnoty popisujúcej koaličnú silu a férovosť rozdelenia Myerson aplikoval na situácie, v ktorých sformovanie koalície nemôže nastať. Týmto zovšeobecneným konceptom známym ako *Myersnova hodnota* sa budeme ďalej zaoberať a popíšeme jeho odvodenie. Aplikáciou na predchádzajúce príklady demonštrujeme rozdiel medzi ňou a Shapleyho hodntou. Kapitola vychádza z [10] a [13].

3.1 Reštrikcie na koaličnej štruktúre

Kľúčovým tvrdením pre Myersona je, že len inštitucionálne koalície môžu skutočne generovať podiel na zisku, ktorý by mal byť rovnomerne rozdelený medzi členov týchto koalícií. Skôr ako prejdeme ku všeobecnej definícií Myersnovej hodnoty, objasnime pojmy *inštitucionálna koalícia* a *koaličná štruktúra*.

Definícia 3.20. Nech N je ľubovolná množina hráčov, z ktorých len podmnožina S spĺňa predpoklady na vytvorenie koalície. Túto podmnožinu označíme *inštitucionálna koalícia*.
Inštitucionálnou koaličnou štruktúrou potom nazveme množinu týchto inštitucionálnych koalícií $\Omega \subset 2^N$, takú že $\emptyset \in \Omega$.

Pre zavedenie Myersnovej hodnoty najskôr definujeme na $\Omega \subset 2^N$ nasledujúce koncepty:

- **Stabilný uzáver**
  Stabilným uzáverom na Ω nazveme najmenšiu množinu $\overline{\Omega} \subset 2^N$ takú, že

$$\Omega \subset \overline{\Omega} \text{ a } \forall\, S, T \in \overline{\Omega}, \text{kde pre } S \cap T \neq \emptyset \text{ platí } S \cup T \in \overline{\Omega}. \tag{3.1}$$

- **Ω-komponenty**
  Nech $S \subset N$ je ľubovolná koalícia. Trieda $\Omega - komponentov$ je potom definovaná ako

$$C_\Omega(S) = \{T \in \overline{\Omega} \mid T \subset S \text{ a neexistuje } R \in \Omega : T \subsetneq R \subset S\} \tag{3.2}$$

Tvrdenie 3.21. *Pre každú koalíciu $S \subset N$, pre ktorú platí $C_\Omega(S) \neq \emptyset$, vytvárajú Ω-komponenty množiny S súbor podmnožín S, ktoré sú po dvoch disjunktné.*
Dôkaz tvrdenia je možné nájsť v [10].

Na základe uvedených konceptov môžeme zaviesť Myersonovu reštrikciu kooperatívnej hry.

Definícia 3.22. Nech $\Omega \subset 2^N$ je koaličná štruktúra a máme koaličnú hru $v \in \mathscr{G}_N$.
Ω *reštrikcia* hry je $v_\Omega \to \mathbb{R}$ daná:

$$v_\Omega(S) = \sum_{T \in C_\Omega(S)} v(T). \tag{3.3}$$

Keď máme zavedenú Ω reštrikciu hry v môžeme definovať *Myersnovu hodnotu*.

3.2 Vyjadrenie hodnoty

Definícia 3.23. Nech je $\Omega \subset 2^N$ ľubovolná koaličná štruktúra a $v \in \mathscr{G}^N$.
$\mathscr{M}^N = \{\Omega \mid \Omega \subset 2^N\}$ nech je súbor všetkých koaličných štruktúr na N. *Myersnova hodnota* je potom funkcia $\mu : \mathscr{G}^N \times \mathscr{M}^N \to \mathbb{R}$, ktorá v každej hre v, každému hráčovi $i \in N$ priradí (Myersnovu) hodnotu, ktorá je Shapleyho hodnotou Ω-reštrikcie, teda:

$$\mu_i(\Omega, v) = \varphi_i(v_\Omega) \tag{3.4}$$

Na ilustráciu výpočtu Myersnovej hodnoty sa vrátime k príkladu 2.4.1 **Škandinávia**.

Príklad 3.24. V príklade 2.4.1 sme mali koaličnú štruktúru $\Omega = 2^N$, kde mohli všetci hráči medzi sebou tvoriť koalície. Prehodnotíme komplexnú situáciu a usúdime, že hráč 3 (Nórsko) a hráč 4 (Švédsko) nespĺňajú potrebné predpoklady na vytvorenie koalície. Koaličná štruktúra takejto hry teda bude:

$$\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}\}$$

a hodnoty jej členov:

$$v(\emptyset) = 0 \qquad v(\{1\}) = 11 \qquad v(\{2\}) = 15 \qquad v(\{3\}) = 17 \qquad v(\{4\}) = 21$$

$$v(\{1,2\}) = 38 \qquad v(\{1,3\}) = 40 \qquad v(\{1,4\}) = 44 \qquad v(\{2,3\}) = 36$$

$$v(\{2,4\}) = 48 \qquad v(\{1,2,3\}) = 52 \qquad v(\{1,2,4\}) = 64$$

Najskôr zostrojíme stabilný uzáver Ω podľa 3.1.

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

.

Vzhľadom k 3.2 a 3.3 Ω zavedieme reštrikciu a spočítame v_Ω pre koalície S.
Z vlastnosti 1.3 podstatnej koaličnej hry plynie, že $v_\Omega(S) = v(S)$ pre všetky $S \in \Omega$ a zvyšné hodnoty koalícií dopočítame.

$$\begin{aligned} v_\Omega(\{1,3,4\}) &= 61 \\ v_\Omega(\{2,3,4\}) &= 65 \\ v_\Omega(\{1,2,3,4\}) &= 88 \end{aligned}$$

Myernsovu hodnotu pre jednotlivých hráčov získame na základe vzťahu 3.4.

$$\begin{aligned} \mu_1(v) = {} & \left(\frac{(1-1)!(4-1)!}{4!}(11-\ 0) \right) + \left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(38-15) \right) + \\ & + \left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(48-17) \right) + \left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(44-21) \right) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(64-48)\right)+\left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(52-36)\right)+\\
&+\left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(61-\ \ 0)\right)+\left(\frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}(88-65)\right)+\\
&=\frac{68}{3}
\end{aligned}
$$

$$\mu_2\left(v\right)=\frac{72}{3}$$

$$
\begin{aligned}
\mu_3\left(v\right)=&\left(\frac{(1-1)!(4-1)!}{4!}(17-\ \ 0)\right)+\left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(48-11)\right)+\\
&+\left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(36-15)\right)+\left(\frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}(\ \ 0-21)\right)+\\
&+\left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(52-38)\right)+\left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(61-44)\right)+\\
&+\left(\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}(65-48)\right)+\left(\frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}(88-64)\right)+\\
&=\frac{52}{3}
\end{aligned}
$$

$$\mu_4\left(v\right)=\frac{72}{3}$$

Získavame Myersnov vektor $\mu\left(v\right)=\varphi(v_{\Omega})=\left(\frac{68}{3},\frac{72}{3},\frac{52}{3},\frac{72}{3}\right)$.

Myerson sa zameriaval na hry na sieťach a komunikačné kanály, kde neexistencia spojenia medzi hráčmi bránila vzniku koalícii. Následne boli prípustné koalície dopĺňané na základe existencie ďalšieho hráča spojeného s obomi, ktorý predstavuje styčný bod. Potom s takýmito tzv. priamymi a nepriamymi koalíciami zaobchádzal rovnako, čo si mnohí autori modifikujú v súvislosti s tým akú situáciu skúmajú. Predpisy výpočtu Myersnovej hodnoty sú stále dopĺňané rôznymi autormi (viď. napr. Algaba [1], Bilbao [4]). V ďalšej časti práce budeme Myersonov koncept aplikovať na krajiny bývalej Juhoslávie berúc do úvahy špecifickú povahu regiónu.

3.3 Aplikácia na krajiny bývalej Juhoslávie

Príklad spolupráce krajín bývalej Juhoslávie je vynikajúcou ukážkou situácie, kedy by určite existovali reštrikcie na koaličnej štruktúre a možnosť tvorby koalícií by bola jednoznačne obmedzená. V príklade 2.4.2 sme počítali s ideálnou možnosťou, kedy by medzi krajinami neboli prítomné žiadne prekážky v spolupráci, ale takáto situácia v realite nemôže nastať. Pre podobné prípady je preto Myersnova hodnota oveľa vhodnejší koncept riešenia, ktorý by produkoval reprezentatívnejšie výsledky a poskytoval by možnosť lepšej interpretácie.

Región Balkánskeho polostrova je etnicky, nábožensky, politicky, ale aj na základe historických skúseností rozštiepený a konfliktný. Situácia v oblasti je veľmi komplexná, preto sa nebudeme pokúšať obsiahnuť ju v celku, ale vyberieme si pár príkladov konfliktných línií, na základe ktorých určíme obmedzenia na tvorbu koalícií.

Riešime rovnaký problému ako v príklade 2.4.2 **krajiny bývalej Juhoslávie**. Zoberieme do úvahy heterogenitu štátov a tým sa znemožní vznik niektorých koalícií. Detailnejšie vysvetlenie princípu, na základe ktorého sme obmedzenia zavádzali, je možné nájsť v Prílohe A.2.

Po zavedené reštrikcie dostávame koaličnú štruktúru 18 možných koalícií:

Tab. 4: Hodnoty hráčov a koalící v koaličnej štruktúre Ω(Zdroj: vlastný).

S	1	2	3	4	5	6
v(S)	7,6	1,4	10,0	1,7	4,6	9,0
S	7	36	236	345	356	357
v(S)	17,1	28,5	23,4	16,9	29,2	32,3
S	367	456	567	2356	3567	12456
v(S)	41,1	17,9	33,3	30,5	46,2	26,5

Následne dodefinujeme ich koaličnú funkciu pre ostatné koalície na základe vzťahu v_Ω (3.3). Keďže takto v podstate opäť vrátime do hry koalície, ktoré boli predtým z určitých dôvodov zakázané, musíme brať do úvahy, že tieto dôvody nezmizli. Preto v_Ω ešte upravíme koeficientom k, ktorý predstavuje komplikácie, spôsobené nedostatkom konsenzu medzi hráčmi, ich vzájomné konflikty, problematickú komunikáciu a podobné faktory, ktoré pôvodne viedli k zákazu vzniku týchto koalícií. Keďže región je skutočne roztrieštený a dohovor strán takmer nemožný, koeficient zvolíme 0,5.

Teda výsledná hodnota priradená charakteristickou funkciou u koalícii bude:

$$u_\Omega(S) = \begin{cases} k \cdot v_\Omega(S) & \text{pre} S \notin \Omega \\ v(S) & \text{pre} S \in \Omega \end{cases}$$

Po určení hodnôt jednotlivých koalícií novou koaličnou funkciou u_Ω môžeme spočítať Myersnovu hodnotu.

$$\mu\,(v) = \varphi(u_\Omega) = (5,766;\ 1,094;\ 9,816;\ 0,734;\ 4,507;\ 10,412;\ 11,211).$$

Pre jednotlivých hráčov sme opäť vyčíslili koaličný potenciál, teda v prenesenom význame to môžeme interpretovať tak, že vyjadrujeme ich silu vo vyjednávaní. Aby sme poukázali na dopad, aký majú obmedzenia na koaličnej štruktúre, výsledky porovnáme so Shapleyho hodnotou z príkladu 2.4.2.

$$\varphi(v) = (8,035;\ 2,540;\ 12,314;\ 2,308;\ 7,051;\ 12,982;\ 18,270)$$

Oba vypočítané vektory pre lepšiu interpretáciu podelíme možným ziskom, ktorý si môžu hráči rozdeliť a vyjadríme pomernú hodnotu akou prispievajú do koalície.[12]

Tab. 5: Porovnanie Shapleyho a Myersnovej hodnoty (Zdroj: vlastný).

hráč	Shapleyho hodnota	Myersnova hodnota
1	0,127	0,132
2	0,040	0,025
3	0,194	0,225
4	0,036	0,017
5	0,111	0,104
6	0,204	0,239
7	0,288	0,258

Zhodnotenie celej situácie v prípade obmedzení, ktoré sú v realite prítomné, navyšuje pridanú hodnotu výsledkov pre analýzu situácie. Reprezentatívnosť výsledkov môžeme vidieť napríklad na tom, že Chorvátsko (hráč 3) má pri vyjadrení Myersnovej hodnoty silnejšiu pozíciu, čo je podložené pozitívnym procesom rozvoja inštitúcií v krajine a jej posunom smerom k západoeurópskym inštitúciám. Významne svoje postavenie posilnilo aj Slovinsko (hráč 6), ktoré je nepochybne podstatným členom koalícií aj pre jeho dlhú tradíciu samostatnosti a dlhšiu tradíciu členstva v Európskej únii, kde je Chorvátsko relatívnym nováčikom. Pozorujeme tiež, že Srbsko zo svojej výrazne silnej pozície stratilo (značne sa na ňom odrážajú konfliktné vzťahy so susedmi) a Chorvátsko a Slovinsko ho dobiehajú. To je veľmi podstatná implikácia pre koaličné jednania, pretože to značí, že Srbsko nebude jediným dominantným hráčom, ktorý by si určoval podmienky. Pokles vyjednávacej sily nielen Srbska, ale aj Kosova a Macedónska je v reálnej situácii podnetom na preformulovanie politík a správania jednotlivých krajín.

Získané výsledky tak opäť rozširujú pole pre politické interpretácie a otvárajú priestor pre diskusie. Mohli by slúžiť ako záchytný bod pre uchopenie situácie a pokusy sprehľadniť ju. Vyššie rozobraté príklady aj predostrené vysvetlenia sú ilustratívne, ale opierajú sa o reálne dáta a sú vystavané tak, aby čo najviac zodpovedali skutočnej situácii. Po dodatočnej modifikácii a upresnení či už charakteristickej funkcie v, koaličnej štruktúry Ω alebo funkcie u, by vyjadrenie Myersnovej hodnoty mohlo nájsť využitie v skutočných a aktuálnych problémoch z oblasti medzinárodných vzťahov.

[12]Problémy a nezhody, teda koeficient k, sa na najvyššom možnom zisku významne prejavia aj napriek bonusu 7 bodov za vznik veľkej koalície. Pomernou hodnotu dostaneme pre obe hodnoty výsledky, ktoré je možné dobre porovnávať.

Záver

Bakalárska práca sa zaoberala použitím matematického aparátu kooperatívnej teórie hier na hypotetické situácie vypuknutia lokálneho konfliktu. Koaličné hry s prenosným ziskom sú aplikáciou matematiky, ktorá je prítomná a dá sa využívať v každodennom živote. Medzinárodné vzťahy sa zase vyznačujú eklektivizmom umožňujúcim aplikovať rôzne koncepty. Spojením sa tak ponúka veľké množstvo aplikácií a interpretácií výsledkov. Cieľom práce bolo zoznámiť sa s kooperatívnymi hrami a poukázať na tieto možnosti použitia, ktoré ešte nie sú úplne bežné.

Prvá kapitola, definovaním pojmov a predstavením známych konceptov riešenia, vytvorila základ pre ďalšiu aplikáciu. Dôraz bol kladený najmä na zavedenie Shapleyho axiómov určujúcich jednoznačné riešenie pre každú hru. Shapleyho hodnota býva označovaná ako férové rozdelenie, lebo zohľadňuje marginálne príspevky, ktorými hráči do koalície prispievajú. Takto odvodené rozdelenie zisku tak vypovedá o hodnote a význame jednotlivých hráčov pre koalíciu, čo je podstatný výsledok pre prípadnú interpretáciu na poli medzinárodných vzťahov.

V druhej časti práce boli zostavené dva konkrétne príklady možného lokálneho konfliktu v oblasti Škandinávie a Balkánskeho polostrova. Pre takto zavedenú hru bola najskôr definovaná charakteristická funkcia, ktorá vyčísľovala silu jednotlivých koalícií. Pri tvorbe charakteristickej funkcie sme zohľadnili teoretické koncepty z oblasti medzinárodných vzťahov zaoberajúce sa faktormi podstatnými pre zhodnotenie sily štátu a tiež pre schopnosť štátov tvoriť koalície. Pre jednotlivé koalície bola potom vypočítaná hodnota funkcie z reálnych dát k referenčnému roku 2012. Následne sme pre takto definovanú hru našli riešenie rozdelenia zisku prostredníctvom Shaplyeho hodnoty a ukázali možnosti interpretácií v oblasti medzinárodných vzťahov.

Tretia kapitola sa zaoberala konceptom Myersnovej hodnoty, ktorá počíta s narušenou koaličnou štruktúrou, teda neschopnosťou niektorých koalícií sformovať sa. Myerson a v nadväznosti na neho mnohí ďalší autori odkazujú na rôzne dôvody pre obmedzenie vzniku koalícií a jeho dopad na hodnotu a vyjednávaciu silu jednotlivých hráčov. Keďže v realite medzinárodných vzťahov je bežné, že niektoré koalície medzi štátmi nemôžu vzniknúť, tento koncept sme aplikovali na zostavené hypotetické príklady z predchádzajúcej kapitoly. Vypočítanú Myersnovu hodnotu sme porovnali so Shaplyeho a otvorili sa nám tak ďalšie možnosti na reprezentatívnu interpretáciu výsledkov.

Práca sa snaží nielen pochopiť a priblížiť pojmy z kooperatívnej teórie hier, ale najmä zdôrazniť veľký potenciál, ktorý má aplikácia jej aparátu na medzinárodné vzťahy. Pokúšala sa poskytnúť ukážku možného náhľadu na lokálne konflikty a demonštrovať, ako môže kooperatívna teória hier pomôcť lepšie uchopiť problematiku konfliktov v medzinárodných vzťahoch.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

[1] ALGABA, E., J. M. BILBAO a J. J LÓPEZ. The Myerson value for union stable structures. *Mathematical Methods of Operations Research* [online]. 2001, **2001**(54), 359-371 [cit. 2017-05-19]. Dostupné z: http://hercules.us.es/ mbilbao/pdffiles/myerson.pdf

[2] BARRON, E.N. Cooperative Games (Chapter 5). In:*Game theory an introduction*. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience, 2008, s. 219-307. DOI: 10.1002/9781118032398. ISBN 9781118032398.

[3] BEZALEL Peleg and Peter SUDHOLTER: *Introduction To The Theory Of Cooperative Games.* , Boston: Kluwer Academic Pub, 2004. ISBN 140207784X.

[4] BILBAO, Jesus-Mario. Values and potential of games with cooperation structure. *International Journal of Game Theory* [online].**1998**(27) [cit. 2017-05-19]. DOI: 10.1007/BF01243199. ISSN 0020-7276. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/BF01243199

[5] BRAMS, Steven J. *Biblical games: game theory and the Hebrew Bible.* Cambridge, Mass.: MIT Press, c2003. ISBN 9780262025317.

[6] CASHMAN, Greg. *What causes war?: an introduction to theories of international conflict*. Lanham: Lexington Books, 2000. ISBN 0739101129.

[7] *D-maps* [online]. [cit. 2017-05-18]. Dostupné z: http://d-maps.com/continent.php?num_con=5&lang=en.

[8] Ethnic groups. In: *Central Intelligence Agency: World Factbook 2000 [online].* Dostupné z: https://www.cia.gov/library/publications/download/download-2000/wfbfull.zip; Ethnic groups. In: Central Intelligence Agency: World Factbook 2010 [online].
Dostupné z: https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/fields/2075.html.

[9] Freedom House. *Freedom in the World 2012* [online]. [cit. 2017-05-18]. Dostupné z: https://freedomhouse.org/report/freedom-world/freedom-world-2012.

[10] GILLES, Robert P.: *The cooperative game theory of networks and hierarchies.*, Heidelberg: Springer, c2010. ISBN 978-3-642-052828.

[11] JACKSON, Matt. Comparing the Core and the Shapley Value in an Example. In: JACKSON, Matt, Kevin LEYTON-BROWN a Yoav SHOHAM. *Game Theory Online* [online]. 2013 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=zmtFhP4cMhQ

[12] LEYTON-BROWN, Kevin. The Core. In: JACKSON, Matt, Kevin LEYTON-BROWN a Yoav SHOHAM. *Game Theory Online* [online]. 2013 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=DW$_I8UuU6I$.

[13] MYERSON, Roger B. *Game theory: analysis of conflict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, c1991. ISBN 0674341155.

[14] OWEN, Guillermo: *Game Theory.* Emerald Group Publishing Limited, Bingley: Emerald, 2013. ISBN 978-1-781-90507-4.

[15] PETERS, Hans. *Game Theory a Multi-Leveled Approach* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008 [cit. 2017-05-20]. ISBN 978-354-0692-911.

[16] Religions. In: *Central Intelligence Agency: World Factbook 2000 [online]*. Dostupné z: https://www.cia.gov/library/publications/download/download-2000/wfbfull.zip; Religions. In: Central Intelligence Agency: World Factbook 2010 [online]. Dostupné z: https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/fields/2122.html.

[17] SHAPLEY, Lloyd S. a Martin SHUBIK: *Pure Competition, Coalitional Power, and Fair Division.* International Economic Review. 1969, 10(3), 337-362. DOI: 571192719691001. ISSN 00206598.
Dostupné z: http://search.ebscohost.com.ezproxy.lib.vutbr.cz/login.aspx?direct=true&db=bsu&AN=5711927&lang=cs&site=ehost-live.

[18] SINGER, David. Correlates of War. Dostupné z: http://www.correlatesofwar.org/data-sets/national-material-capabilities, aktualizované 9.februára 2017..

[19] WALT, Stephen M. *The origins of alliances* 1987, Ithaca: Cornell University Press, 1987. Cornell studies in security affairs. ISBN 0-8014-9418-4.

ZOZNAM TABULIEK

ZOZNAM OBRÁZKOV

ZOZNAM PRÍLOH

A PRÍLOHY

A.1 Hodnoty koalícií krajín bývalej Juhoslávie

Tab. 6: Účelová funkcia krajín bývalej Juhoslávie, Zdroj: vlastný

členovia koalície	hodnota koalície	členovia koalície	hodnota koalície	členovia koalície	hodnota koalície	členovia koalície	hodnota koalície
S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
1	7,60	127	26,40	1235	23,80	3567	46,20
2	1,40	134	19,60	1236	30,20	4567	34,90
3	10,00	135	22,50	1237	36,30	12345	25,50
4	1,70	136	28,90	1245	15,50	12346	31,90
5	4,60	137	35,00	1246	21,90	12347	37,90
6	9,00	145	14,30	1247	28,00	12356	37,80
7	17,10	146	20,70	1256	24,80	12357	40,80
12	9,50	147	26,70	1257	30,90	12367	47,30
13	18,10	156	23,60	1267	37,30	12456	26,50
14	9,80	157	29,60	1345	24,10	12457	32,60
15	12,70	167	36,00	1346	30,60	12467	39,00
16	19,10	234	13,60	1347	36,60	12567	41,90
17	25,20	235	16,50	1356	36,50	13456	38,10
23	13,30	236	23,40	1357	39,50	13457	41,20
24	3,80	237	31,40	1367	45,90	13467	47,60
25	6,70	245	8,30	1456	25,20	13567	53,50
26	14,40	246	12,70	1457	31,30	14567	42,20
27	20,50	247	20,70	1467	37,70	23456	32,10
34	12,40	256	15,60	1567	40,60	23457	35,20
35	15,30	257	23,70	2345	18,20	23467	41,60
36	28,50	267	30,50	2346	24,60	23567	44,50
37	29,10	345	16,90	2347	30,60	24567	36,20
45	7,00	346	23,30	2356	30,50	34567	47,90
46	11,70	347	29,40	2357	33,50	123456	36,40
47	19,50	356	29,20	2367	26,40	123457	42,50
56	16,30	357	32,30	2456	19,20	123467	48,90
57	22,40	367	41,10	2457	25,30	123567	51,80
67	30,10	456	17,90	2467	32,70	124567	43,60
123	19,30	457	24,00	2567	34,60	134567	52,20
124	11,00	467	30,40	3456	30,80	234567	46,20
125	13,90	567	33,30	3457	33,90	1234567	63,50
126	20,30	1234	20,90	3467	40,30		

A.2 Obmedzenia tvorby koalícií pre krajiny bývalej Juhoslávie

Kvôli komplikovanosti a početným nezhodám medzi krajinami na Balkánskom polostrove, zavedieme na koaličnej štruktúre reštrikcie a zakážeme vznik niektorých koalícií na základe náboženskej a etnickej heterogenity a prítomnosti separatistických hnutí.

Tabuľka zhŕňa základné demografické údaje o krajinách bývalej Juhoslávie (zozbierané približne k referenčnému roku 2012[13] - v prípade iného roku uvedené v zátvorke) a stručne pojednáva o separatistických hnutiach v danej krajine. Údaje boli získané zo zdrojov [8], [16].

Tab. 7: Základné demografické údaje o krajinách bývalej Juhoslávie, Zdroj: vlastný

Krajina	Hráč	Etnická heterogenita	Náboženská heterogenita	Separatistické hnutia
Bosna a Hercegovina	1	Bosniaci 50.11%, Srbi 30.78%, Chorváti 15.43% (2013)	Moslimovia 50.70%, Pravoslávni 30.75%, Katolíci 15.19%, ateisti 0.79%, agnostici 0.31%, iní 1,15 %, nešpecifikovaní 1,12 % (2013)	SDS, SNSD, HDZ 1990 (Chorvátsko)
Čierna Hora	2	Čiernohorci 45%, Srbi 28.7%, Bosniaci 8.7%, Albánci 4.9%, Moslimovia 3.3%,(2011)	Pravoslávni 72.1%, Moslimovia 19.1%, Katolíci 3.4%, ateisti 1.2%, iní 1.5%, nešpecifikovaní 2.6% (2011)	Kraja (Albánsko)
Chorvátsko	3	Chorváti 90.4%, Srbi 4.4%, iní 4.4% (Bosniaci, Maďari, Slovinci, Česi, and Rómovia) (2011)	Rímskokatolíci 86.3%, Pravoslávni 4.4%, Moslimovia 1.5%, iní 1.5%, nešpecifikovaní 2.5%, ateisti 3.8% (2011)	
Kosovo	4	Albánci 92.9%, Bosniaci 1.6%, Srbi 1.5%, Turci 1.1% (2011)	Moslimovia 95.6%, Rímskokatolíci 2.2%, Pravoslávni 1.5%,iní 0.07%, ateisti 0.07%, nešpecifikovaní 0.6% (2011)	
Macedónsko	5	Dáta o národnosti/etnicite nie sú predmetom cenzu	Pravoslávni 65,9 %, Moslimovia 33,3 %, Katolíci 0,4 %, iní/nešpecifikovaní 1,4%	ANA (Albánsko)
Slovinsko	6	Dáta o národnosti/etnicite nie sú predmetom cenzu	Rímskokatolíci 64 %, Pravoslávni 3 %, iní kresťania 1 %, Moslimovia 3 %, ateisti 16 %, neveriaci 9 %, iné 1%	
Srbsko	7	Srbi 83.3%, Maďari 3.5%, Rumuni 2.1%, Bosniaci 2%, iní 5.7%, neznámi 3.4% (2011)	Pravoslávni 84.6%, Katolíci 5%, Moslimovia 3.1%, Protestanti 1%, ateisti 1.1%, iní 0.8%,nešpecifikovaní/neznámi 4.5% (2011)	VMSZ (Maďarsko), Sandžak (BaH), Preševo (Albánsko) Kosovo

Pri pohľade na náboženskú heterogenitu vidíme, že v krajinách prevláda buď kresťanstvo (či už ortodoxné alebo rímskokatolícke) alebo islam. Krajiny si rozdelíme na podmnožiny $K = \{3, 6, 7\}$ - v týchto krajinách prevláda kresťanstvo a islam je zastúpený len v malej miere, $L = \{2, 5\}$ - krajiny sú kresťanské, ale islam je druhé náboženstvo, ku ktorému sa hlási značná časť populácie, $M = \{1, 4\}$ - krajiny sú moslimské. Zameriame sa na Kosovo (hráč 4), ktoré je spomedzi všetkých krajín najviac nábožensky vyprofilované. Krajina je silne moslimská, čo sa prejaví na jej možnostiach tvoriť koalície nasledovne: Kosovo nepôjde do trojčlennej koalície nepôjde výlučne s kresťanskými štátmi; štvorčlennú koalíciu s dvomi kresťanskými štátmi vytvorí, len ak bude prítomná aj Bosna a Hercegovina alebo ak budú prítomné oba štáty,

[13] Ku roku 2012 boli zozbierané aj údaje o indexe CINC a demokratickom indexe.

kde je islam druhé najviac zastúpené náboženstvo; pre viac ako štvorčlenné koalície musí byť spolu s Kosovom prítomná aj Bosna a Hercegovina.

$$S \subset 2^N = \begin{cases} |S| = 2 & S = \{4, i\}, i \in K \cup L \cup M \\ |S| = 3 & S = \{4, i, j\},\ i \in L \cup M, j \in K \cup L \cup M \\ |S| = 4 & S = \{4, i, j, k\} \text{ ak } i = 1 \text{ potom } j, k \in K \cup L \\ & \text{inak } \ i, j \in L,\ k \in M \cup K \\ |S| > 4 & S = \{1, 4, Z\},\ Z \subset (K \cup L) \end{cases}$$

Na základe etnicity budeme vylučovať možnosti tvorby koalície medzi dvomi krajinami v prípade, že iné ako domáce etnikum má na populácii väčší ako 25% podiel, čo by mohlo byť zdrojom konfliktov medzi krajinami (aj v spojení s potenciálnym vznikom separatistických hnutí, ktorý ďalej zohľadníme). Čiže vylúčime možnosť koalície Bosny a Hercegoviny a Srbska, Čiernej Hory a Srbska.

Dve krajiny nemôžu vytvoriť koalíciu, ak sa v jednej z nich nachádza separatistické hnutie, ktorého cieľom je spojenie sa s druhou krajinou. Teda nie je možná koalícia Bosny a Hercegoviny a Chorvátska, Bosny a Hercegoviny a Srbska, Kosova a Srbska.

Ďalej zohľadníme špecifickosť regiónu v tom, že niektoré krajiny sú pomerne mladé a na ochranu vlastnej demokracie slabé, preto by im vytvorenie koalície veľmi nepomohlo. Budeme teda predpokladať, že okrem Slovinska, Macedónska a Chorvátska, ktoré majú najdlhšiu tradíciu inštitúcií, by si ostatní hráči by spojením nestabilných režimov mohli ešte poškodiť, preto:

- nebudú vytvárať dvojčlenné koalície
- v trojčlenných koalíciách musia byť prítomní aspoň dvaja hráči z trojice Slovinsko, Chorvátsko, Macedónsko
- v štvorčlenných koalíciách musia byť prítomné všetky tri štáty Slovinsko, Chorvátsko a Macedónsko

Na záver pridáme ako podmienku na možnosť vzniku koalície, z geopolitických a aj logistických dôvodov, aspoň jednu spoločnú hranicu medzi štátmi koalície.